DVPT 216

$\sum_{p\in P} \frac{1}{p}$ diverge [FG96]

Traîner

Prop: $\sum_{p\in P} \frac{1}{p}$ est divergente.

Dém: Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ une fonction multiplicative non nulle (ie $\forall m,n \in \mathbb{N}^*$, $f(mn) = f(m)f(n)$).

Alors $\sum |f(n)|$ cv ssi $\prod_{p\in P} (1+|f(p)|+|f(p^2)|+\dots)$ cv.

En effet: • supp $\sum |f(n)|$ cv.

Alors $\forall p \in P$, $\sum (1+|f(p)|+|f(p^2)|+\dots)$ cv.

Soit $u(x) = \prod_{\substack{p\leq x\\ p\in P}} (1+f(p)+f(p^2)+\dots)$

On développe: $u(x) = \sum_{n\in N_x} f(n)$ où N_x est l'ensemble des entiers dont les facteurs premiers sont inférieurs à x. (on utilise la multiplicativité de f)

$[\![1,x]\!] \subset N_x$ donc $u(x) = \sum_{n=1}^{x} f(n) + \sum_{\substack{n\in N_x\\ n>x}} f(n)$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) - u(x) = \sum_{n>x}^{+\infty} f(n) - \sum_{\substack{n\in N_x\\ n>x}} f(n)$

Donc $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) - u(x)\right| \leq \sum_{n>x}^{+\infty} |f(n)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Donc le pdt cv, et $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p\in P} (1+f(p)+f(p^2)+\dots)$ (*)

• supp que le pdt cv.

Alors $\sum_{n\leq x} |f(n)| \leq \sum_{n\in N_x} |f(n)| = \prod_{p\leq x} (1+|f(p)|+|f(p^2)|+\dots)$ cv

donc $\sum |f(n)|$ cv, et on a (*).

- Supp qu'on est ds le cas de cv.

$\sum |f(n)|$ cv donc $\forall p \in \mathcal{P}$, $f(p^n) \longrightarrow 0$

$f(p)^n \longrightarrow 0$

donc $|f(p)| < 1$.

D'où $1 + f(p) + \dots = \dfrac{1}{1-f(p)}$.

On a donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1-f(p)}$.

- Prenons $f(n) = \dfrac{1}{n}$. RpA : $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}$ cv.

$\log\left(1 - \dfrac{1}{p}\right) \sim -\dfrac{1}{p}$ donc $\sum \log\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$ cv.

Donc $\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ cv.

Par ce qui précède, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ cv. absurde $\square$ (Cor. ∞té de nb premiers)

<u>Une identité</u> : $f(n) = \dfrac{1}{n^s}$

$\forall s > 1$, $\sum |f(n)|$ cv donc $\displaystyle\sum \frac{1}{n^s} = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$